

# Kneser 彩色関数とツリーの完全不変量

西村優作 \*

## 概要

Stanley 氏によって彩色対称関数と呼ばれるグラフの不変量が考案され、これがツリーの完全不変量であると予想した。この予想は現在まで未解決である。一方、三枝崎氏は彩色対称関数を一般化した Kneser 彩色関数を定義した。Kneser 彩色関数は自然数  $k$  によるパラメータを持っており、特に  $k=1$  の場合、これは彩色対称関数と一致する。本講演では、 $k=2$  の場合、Kneser 彩色関数がツリーの完全不変量となることを紹介する。

## 1 はじめに

グラフの彩色とは、隣接する 2 頂点を異なる色で塗るような頂点の彩色のことであり、彩色に関連するグラフの不変量はいくつか存在している。例えば、彩色数というグラフの不変量はグラフの彩色に必要な色の最小値である。彩色とはグラフ間の準同型を用いて定義することができるため、彩色多項式を準同型によって定義できる。具体的には、グラフ  $G$  を  $n$  色で彩色する時、色を頂点とする  $n$  頂点完全グラフ  $K_n$  を考えると、彩色とは  $G$  から  $K_n$  への準同型写像とみなすことができる。R.P. Stanley 氏は彩色を用いた不変量として、彩色対称関数なるものを考案した。

**定義 1.1** (彩色対称関数 [3]). 自然数を頂点とする完全グラフを  $K_{\mathbb{N}}$  とする。  $G$  をグラフとした時、その彩色対称関数を下記で定義する:

$$X_{K_{\mathbb{N}}}(G) := X_{K_{\mathbb{N}}}(G, x) := \sum_{\phi \in \text{Hom}(G, K_{\mathbb{N}})} \prod_{v \in V_G} x_{\phi(v)}.$$

彩色対称関数は形式的冪級数であるから、関数ではないが、慣習として彩色対称関数と呼ばれている。彩色対称関数には、以下の有名な予想がある。

**予想 1.1** ([3]).  $X_{K_{\mathbb{N}}}(\bullet)$  はツリーの完全不変量となる。つまり、 $T_1$  と  $T_2$  とが非同型なツリーであるならば、

$$X_{K_{\mathbb{N}}}(T_1) \neq X_{K_{\mathbb{N}}}(T_2).$$

この予想は現在まで未解決であるが、一般に彩色対称関数はグラフの完全不変量ではないことは既に知られており、例えば図 1 の二つのグラフは非同型であるが同じ彩色対称関数を持つ。

彩色対称関数の一般化として、Kneser 彩色関数と呼ばれる三枝崎達によって定義された [1]。Kneser 彩色関数は Kneser グラフと呼ばれるグラフを用いて定義される。

---

\* 早稲田大学大学院基幹理工学研究所 数学応用数理専攻, E-mail:n2357y@ruri.waseda.jp

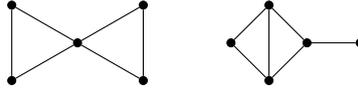


図 1: 非同型だが同じ彩色対称関数を持つ二つのグラフ

**定義 1.2** (Kneser グラフ). Kneser グラフ  $K_{\mathbb{N},k}$  とは、頂点集合が自然数の  $k$  点集合全体で、二つの頂点の共通部分が空である時に辺を持つと定義されたグラフのことである。

**定義 1.3** (Kneser 彩色関数). Kneser 彩色関数を下記で定義する。

$$X_{K_{\mathbb{N},k}}(G) := X_H(K_{\mathbb{N},k}, x) := \sum_{\varphi \in \text{Hom}(G, K_{\mathbb{N},k})} \prod_{v \in V_G} x_{\varphi(v)}$$

$k = 1$  の場合 Kneser グラフは完全グラフであるため、 $X_{K_{\mathbb{N},1}}(G) = X_{K_{\mathbb{N}}}(G)$  となる。従って、Kneser 彩色関数は彩色対称関数の一般化と考えることができる。Kneser 彩色関数の集合はグラフの完全不変量になることが知られている。

**定理 1.1** ([1]). Kneser 彩色関数の集合

$$\{X_{K_{\mathbb{N},k}}(\bullet)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

は有限グラフの完全不変量になる。

ここで、予想 1.1 を Kneser 彩色関数へと一般化した予想を考えることができる。

**予想 1.2** ([1]).  $X_{K_{\mathbb{N},2}}(\bullet)$  はツリーの完全不変量である。

Kneser 彩色関数は  $k$  が大きくなるほど強い不変量となることが知られている。つまり、 $X_{K_{\mathbb{N},k+1}}(G_1) = X_{K_{\mathbb{N},k+1}}(G_2)$  ならば  $X_{K_{\mathbb{N},k}}(G_1) = X_{K_{\mathbb{N},k}}(G_2)$  が成立する。従って、予想 1.1 が成り立つならば予想 1.2 も成立する。本稿では、予想 1.2 が成立することを示す。

本稿の構成は以下の通りである。2 章で、用語の諸定義をし、また Kneser 彩色関数について知られる Power sum expansion と呼ばれる定理を紹介する。3 章では  $k = 2$  の Kneser 彩色関数がツリーの完全不変量となることを示す。

## 2 Kneser 彩色関数の Power sum expansion

本章では、予想 1.2 の証明に重要な Kneser 彩色関数に関する Power sum expansion と呼ばれる定理を紹介する。まずは、必要な用語を定義していく。以降、グラフ  $G$  の頂点集合を  $V(G)$  とし、辺集合を  $E(G)$  とする。また、 $G$  の頂点  $v$  について、 $N_G(v)$  と書いたら頂点  $v$  の近傍集合とする。 $G$  の 2 頂点  $u$  と  $v$  について、 $d_G(u, v)$  を  $u$  と  $v$  との距離とする。そして、 $G$  と  $H$  が同型であることを  $G \simeq H$  で表す。

**定義 2.1** ([1]). 自然数の  $k$  点集合  $n$  個による多重集合全体の集合を  $\mathcal{C}_n^{(k)}$  とする。 $\mathcal{C}_n^{(k)}$  の二つの元  $\{I_1, \dots, I_n\}$  と  $\{J_1, \dots, J_n\}$  について対称群の元  $\sigma$  が存在して

$$\{I_1, \dots, I_n\} = \{\sigma(J_1), \dots, \sigma(J_n)\},$$



て *admissible* であると呼ぶ。また、

$$\mathcal{A}_G^{(2)} := \{H \in \mathcal{P}_n^{(2)} \mid H \text{ が } G \text{ によって admissible となる。}\}$$

と定義する。\$G\$ が非連結な場合、\$G = G\_1 \sqcup \dots \sqcup G\_\ell\$ と連結成分で分解したとき、

$$\mathcal{A}_G^{(2)} := \mathcal{A}_{G_1}^{(2)} \times \dots \times \mathcal{A}_{G_\ell}^{(2)}$$

と定義する。

**例 2.3.** グラフ  $\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array}$  について、 $\mathcal{A}_{\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array}}^{(2)}$  を考える。例えば、 $H = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \in \mathcal{P}_3^{(2)}$  が *admissible* がどうかを確かめる。 $H$  の辺集合は  $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$  と表せるから、 $\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array}$  の頂点を上から  $a, b, c$  とすれば、下記のような全単射  $\phi$  が存在し、従って  $H$  は *admissible* である。

$$\begin{array}{c} \textcircled{a} \\ \textcircled{b} \\ \textcircled{c} \end{array} \mapsto \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$$

$$\phi(a) = \{1, 2\}, \phi(b) = \{2, 3\}, \phi(c) = \{3, 4\}.$$

次に、 $H' = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \in \mathcal{P}_3^{(2)}$  について考える。 $H'$  の辺集合は  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$  と書け、*admissible* になるような  $\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array}$  から  $H'$  への全単射  $\phi$  は存在しないから、 $H'$  は *admissible* でない。このように確かめていくと、 $\mathcal{A}_{\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array}}^{(2)}$  は下記のように表される。

$$\mathcal{A}_{\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array}}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right\}$$

以上の定義を用いて、 $X_{K_{N,2}}(G)$  の Power sum expansion と呼ばれる基底の展開公式が知られている。

**定理 2.1** (Power sum expansion[1]).

$$X_{K_{N,2}}(G) = \sum_{S \subseteq E(G)} (-1)^{|S|} \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_{G_S}^{(2)}} p_\lambda,$$

ただし  $G_S$  は辺集合  $S$  による  $G$  の全域辺部分グラフである。

注意として、一般に  $k \neq 2$  である場合でも、 $k$  一様なハイパーグラフを対応させることで同様に基底  $p_H$  や *admissible* 等の定義、そして Power sum expansion を与えることができる [1]。本稿では  $k = 2$  のみを扱うから、以降  $\mathcal{A}_G^{(2)}$  を単に  $\mathcal{A}_G$  と書く。

### 3 $k = 2$ の Kneser 彩色関数とツリーの完全不変量

本章では、以下の定理を示す。

**定理 3.1.**  $X_{K_{N,2}}(\bullet)$  はツリーの完全不変量である。

実は、 $G$  がツリーである場合には定理 2.1 を用いることで  $X_{K_{N,2}}(G)$  から  $\mathcal{A}_G$  を決定することができる。従って、下記の定理を示せば定理 3.1 の証明が完了する。

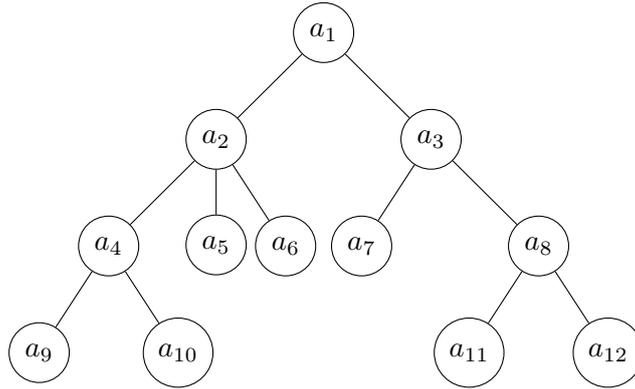


図 3:  $a_1$  を根とする根付き頂点列

**定理 3.2.**  $G_1, G_2$  をツリーとする。  $\mathcal{A}_{G_1} = \mathcal{A}_{G_2}$  ならば  $G_1 \simeq G_2$  である。すなわち、 $\mathcal{A}_\bullet$  はツリーの完全不変量である。

そのため、まずは定理 3.2 の証明を行う。定理 3.2 の証明のために、ツリーに新たな不変量を定義する。

### 3.1 ツリーの最小頂点列

**定義 3.1** (根付き頂点列). ツリー  $T$  の頂点列  $\{a_i\}_{i=1}^n$  が  $a_1 = v$  であり、  $1 \leq i < j \leq n$  を満たす任意の整数  $i, j$  について、  $d_T(v, a_i) \leq d_T(v, a_j)$  を満たす時、これを  $v$  を根とする根付き頂点列と呼ぶ。

$\{a_i\}_{i=1}^n$  が  $v$  を根とする根付き頂点列とすると、任意の  $v$  でない頂点  $a_i$  について  $a_i$  と隣接し  $i_p < i$  となる頂点  $a_{i_p}$  がただ一つ存在する。この  $a_{i_p}$  を、 $v$  を根とした時の  $a_i$  の親と呼ぶ。

例として、図 3 において、  $\{a_i\}_{i=1}^{12}$  が  $a_1$  を根とする根付き頂点列である。また、  $a_1$  を根とした時、  $a_2$  は  $a_4, a_5, a_6$  の親である。

**定義 3.2** (最小頂点列、最小次数列).  $T$  をツリーとして、  $\{a_i\}_{i=1}^n$  を  $v$  を根とする根付き頂点列、  $\{deg(a_i)\}_{i=1}^n$  を  $\{a_i\}_{i=1}^n$  の次数列とする。任意の  $v$  を根とする根付き頂点列  $\{a'_i\}_{i=1}^n$  に対して、

$$\{deg(a_i)\}_{i=1}^n \leq_{lex} \{deg(a'_i)\}_{i=1}^n$$

が成立する時、  $\{a_i\}_{i=1}^n$  を  $v$  を根とする最小頂点列と呼ぶ。ただし、  $\leq_{lex}$  は辞書式順序である。また、  $v$  の最小頂点列の次数列を  $v$  の最小次数列と呼び、  $r(T, v)$  で表す。更に、任意の頂点  $u$  に対して、  $r(T, v) \leq_{lex} r(T, u)$  が成り立つような頂点  $v$  を、  $T$  の最小葉と呼ぶ。また、最小葉  $v$  の最小頂点列の次数列  $r(T, v)$  を  $T$  の最小次数列と呼び、  $r(T)$  で表す。

一般に最小葉は一意的に定まらないが、最小次数列はツリーの不変量である。以降、  $r(T, v)_k$  を  $r(T, v)$  の  $k$  番目の次数を表すことにして、  $r(T)_k$  も同様に定義する。

例えば、図 3 において、

$$(a_{11}, a_8, a_{12}, a_3, a_7, a_1, a_2, a_5, a_6, a_4, a_9, a_{10})$$

は  $a_{11}$  を根とする最小頂点列であり、従って  $a_{11}$  の最小次数列は

$$r(T, a_{11}) = (1, 3, 1, 3, 1, 2, 4, 1, 1, 3, 1, 1)$$

となる。 $a_{11}$  の最小頂点列は  $T$  の中で最小なので、 $a_{11}$  は最小葉であり、 $T$  の最小次数列は  $r(T) = r(T, a_{11})$  となる。

### 3.2 定理 3.2 の証明

最小次数列を使って  $\mathcal{A}_G$  の部分集合  $\Lambda_T(G)$ 、 $\tilde{\Lambda}_T(G)$  を下記で定義する。

$$\Lambda_T(G) := \{H \in \mathcal{A}_G \mid H \text{ が多重辺を持たないツリー}\}$$

$$\tilde{\Lambda}_T(G) := \{H \in \Lambda_T(G) \mid H \text{ の最小次数列 } r(H) \text{ が辞書式順序で最小なツリー}\}$$

例 3.1. 例えば、 $\mathcal{A}_{\circlearrowleft}$  について考えよう。

$$\mathcal{A}_{\circlearrowleft} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right\}$$

であった。この中で、多重辺を持たないツリーは以下の二つである。

$$\Lambda_T(\circlearrowleft) = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right\}$$

一つ目のツリーの最小次数列は  $r(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}) = (1, 2, 2, 1)$  であり、二つ目のツリーは  $r(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}) = (1, 3, 1, 1)$  である。辞書式順序で比較すると  $(1, 2, 2, 1) \leq_{lex} (1, 3, 1, 1)$  であるから、以上より

$$\tilde{\Lambda}_T(\circlearrowleft) = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right\}$$

となる。

$\tilde{\Lambda}_T(G)$  に関して、以下の定理を示す。

**定理 3.3.**  $G$  を 2 頂点以上のツリーとし、グラフ  $H$  を  $\tilde{\Lambda}_T(G)$  の元とする。 $H_0$  というグラフを、 $H$  から最小葉を一つ除いたグラフとする。この時、 $H_0$  は  $G$  と同型である。

例 3.2. 定理 3.3 の主張を確認する。例 3.1 において、 $\tilde{\Lambda}_T(\circlearrowleft) = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right\}$  で、その最小葉は二つの葉である。従って、最小葉を除いたグラフは確かに  $\circlearrowleft$  と同型である。

定理 3.3 の証明のために、まず下記の補題を示す。

**補題 3.1.** 任意の  $\tilde{\Lambda}_T(G)$  のグラフ  $H$  について、その最小次数列  $r(H)$  は下記の不等式を満たす。

$$r(H) \leq_{lex} (1, 2, r(G)_2, r(G)_3, \dots, r(G)_n).$$

*Proof.*  $\tilde{\Lambda}_T(G)$  の定義から、

$$r(H) \leq_{lex} (1, 2, r(G)_2, r(G)_3, \dots, r(G)_n)$$

となる  $H \in \Lambda_T(G)$  を構成すればよい。  $v_1$  を  $G$  の最小葉、  $\{v_i\}_{i=1}^n$  を  $G$  の  $v_1$  を根とする最小頂点列とする。  $v_{i_p}$  を  $v_1$  を根とした時の  $v_i$  の親として、 また  $1_p = 0$  とする。 この時、 頂点集合を  $a_0, a_1, \dots, a_n$  とし、 辺集合を

$$\{\{a_{i_p}, a_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

とするグラフ  $H$  を考える。

まず、  $H$  の admissible 性を確かめる。  $V(G)$  から  $E(H)$  への全単射  $\phi_H$  を

$$\phi_H(v_i) = \{a_{i_p}, a_i\}$$

と定める。 ツリー  $G, H$  と  $\phi_H$  の例を図 4 に示す。  $G$  の任意の隣接 2 頂点  $a_i, a_j$  について、  $i = j_p$  としても一般性を失わない。 この時、  $\phi_H(v_j) = \{a_i, a_j\}$  であり、  $a_i \in \phi_H(v_i)$  から  $\phi_H(a_i) \cap \phi_H(a_j) \neq \emptyset$  である。 以上より  $H$  は  $G$  によって admissible であり、  $H \in \mathcal{A}_G$  である。

次に、  $H$  がツリーであることを示す。  $H$  の定義から、  $H$  の頂点集合は  $a_0$  から  $a_n$  の  $n+1$  個の頂点である。 ここで  $H$  から頂点  $0$  を取り除いたグラフを  $H_0$  とする。 この時、  $H_0$  は  $G$  と同型になる。 何故ならば、  $G$  は  $\{v_{i_p}, v_i\}$  という  $n-1$  本の辺しか存在せず、  $H_0$  の辺も  $\{a_{i_p}, a_i\}$  という  $n-1$  本の辺のみから構成されているからである。  $H$  は  $H_0$  の頂点  $a_1$  に葉をつけたグラフであったから、 以上より  $H$  もツリーである。

最後に最小頂点列について考える。  $v_1$  は  $G$  の最小葉であり  $H_0$  は  $G$  と同型であったから、  $\{a_i\}_{i=1}^n$  は  $H_0$  上での  $a_1$  を根とする最小頂点列である。 従って、  $H$  の頂点列  $\{a_i\}_{i=0}^n$  は  $a_0$  を根とする根付き頂点列となっている。

$$(\deg(a_0), \dots, \deg(a_n)) = (1, 2, r(G)_2, r(G)_3, \dots, r(G)_n)$$

であるから、

$$r(H) \leq_{lex} (1, 2, r(G)_2, r(G)_3, \dots, r(G)_n)$$

となる。 以上より、  $H \in \Lambda_T(G)$  かつ最小頂点列に関する不等式を満たす  $H$  が存在するから、 題が示された。

□

補題 3.1 を用いて、 定理 3.3 が証明される。 本稿では証明の概略のみを記す。  $G$  の頂点集合を  $\{1, 2, \dots, n\}$  とし、  $H$  を  $\tilde{\Lambda}_T(G)$  の任意のツリーとして、 その最小葉を  $a_0$  とする。 更に、  $H$  の  $a_0$  を根とする最小頂点列を  $\{a_i\}_{i=0}^n$  とし、  $a_{i_p}$  を  $a_0$  を根とした時の  $a_i$  の親とする。 この時、  $H$  の辺集合は

$$E(H) = \{\{a_{i_p}, a_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

と表現される。 従って、  $H$  の異なる 2 つの辺  $e_1 = \{a_{i_p}, a_i\}$  と  $e_2 = \{a_{j_p}, a_j\}$  について、  $c(\{a_{i_p}, a_i\}) = a_i$  という関数を定義すると、

$$c(e_1) \neq c(e_2)$$

となる。 よって、

$$\{c(e) \mid e \in E(H)\} = \{a_1, \dots, a_n\}$$

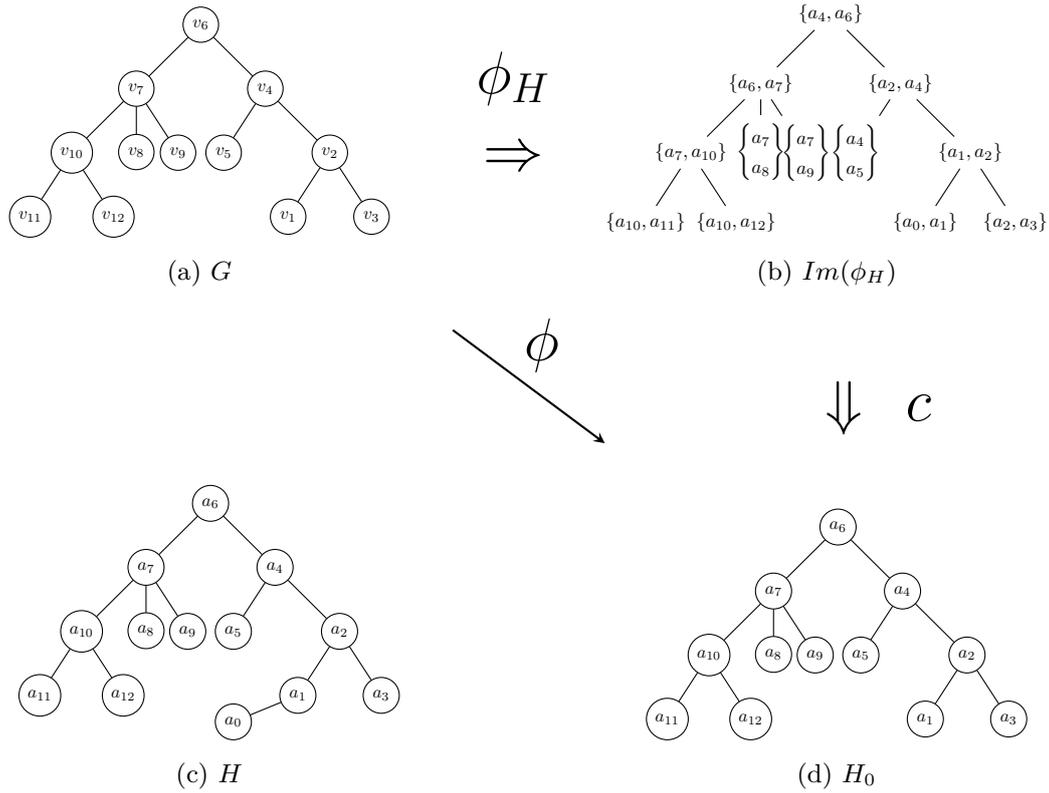


図 4: ツリー  $G, H, H_0$  と全単射  $\phi_H$  の例

となる。そのため、 $H_0$  を  $H$  から最小葉  $a_0$  を除いたグラフとすると、 $c$  は  $E(H)$  から  $V(H_0)$  への全単射となる。ここで、 $H$  は admissible であるから、 $V(G)$  から  $E(H)$  への admissible な全単射写像  $\phi_H$  が一つは存在する。これらを用いると、 $V(G)$  から  $V(H_0)$  への全単射  $\phi = c \circ \phi_H$  を定義することができる。補題 3.1 を用いることで、この  $\phi$  が同型であることを証明できる、という流れとなっている。

定理 3.3 を使って定理 3.2 が示される。

定理 3.2 の証明.  $\mathcal{A}_{G_1} = \mathcal{A}_{G_2}$  だから、特に  $\tilde{\Lambda}_T(G_1) = \tilde{\Lambda}_T(G_2)$  である。定理 3.3 から、 $\tilde{\Lambda}_T(G_1)$  の適当なグラフ  $H$  を選び、その最小葉を除いたグラフを  $H_0$  とすれば、 $H_0 \simeq G_1$  かつ  $H_0 \simeq G_2$  より、 $G_1 \simeq G_2$  が示される。□

### 3.3 定理 3.1 の証明

最後に、定理 3.1 について示す。

定理 3.1 の証明.

$$X_{K_{\mathbb{N}}, k}(G) = \sum_{S \subseteq E(G)} (-1)^{|S|} \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_{G_S}^{(k)}} p_\lambda$$

である。ここで、 $\Lambda = \bigcup_{S \subset E(G)} \mathcal{A}_{G_S}^{(2)}$  として、

$$\Lambda_c := \{H \in \Lambda \mid H \text{ が連結グラフである}\}$$

という集合を考える。 $\mathcal{A}_{G_S}$  の定義から、 $G_S$  が連結であることと、全ての  $H \in \mathcal{A}_{G_S}$  について  $H$  が連結であることは同値である。特に  $G$  がツリーである時、 $G_S$  が連結ならば  $S = E(G)$  であるから、以上より

$$\Lambda_c = \mathcal{A}_G$$

である。従って、特に  $X_{K_{N,2}}(G_1) = X_{K_{N,2}}(G_2)$  ならば  $\mathcal{A}_{G_1} = \mathcal{A}_{G_2}$  となる。定理 3.2 から、この時  $G_1 \simeq G_2$  だったので、以上より  $X_{K_{N,2}}(\bullet)$  はツリーの完全不変量である。□

**例 3.3** ( $\Lambda_c$  の例).

$$X_{K_{N,2}}(\textcircled{\circ}) = p \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - 2p \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} - 2p \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + p \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + p \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + p \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + p \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} + p \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}$$

この時、 $\Lambda = \{ \{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \}, \{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \}, \{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \}, \{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \}, \{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \}, \{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \}, \{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \} \}$  であり、この中で連結なグラフたちは

$$\Lambda_c = \{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \}.$$

となっている。例 2.3 から、確かに  $\Lambda_c = \mathcal{A}_{\textcircled{\circ}}$  である。また、例 3.1、例 3.2 で確認したように、

$$\tilde{\Lambda}_T(\textcircled{\circ}) = \{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \}$$

で、最小葉を除いたグラフは確かに  $\textcircled{\circ}$  と同型であるから、このようにして  $X_{K_{N,2}}(\textcircled{\circ})$  の情報のみから  $\textcircled{\circ}$  を一意的に復元できる。

## 参考文献

- [1] T. Miezaki, A. Munemasa, Y. Nishimura, T. Sakuma and S. Tsujie, Universal graph series, chromatic functions, and their index theory, arXiv:2403.09985 (2024).
- [2] Y. Nishimura, The Kneser chromatic function distinguishes trees, arXiv:2409.20478 (2024).
- [3] R.P. Stanley. A symmetric function generalization of the chromatic polynomial of a graph. *Adv. Math.*, 111(1995), no.1, 166-194.